Πραγματική Ανάλυση

04-12-17

Συνέχεια οριακής συνάρτησης

▸ Έστω (X, ρ) να είναι μετρικός χώρος. Έστω $f_1, f_n: X \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις. Έστω $x_0 \in X$. Υποθέτουμε ότι:
1) $f_n \xrightarrow{u} f$ και 2) Οι f_n είναι συνεχείς στο x_n, για $n = 1, 2, \dots$
Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon_0 > 0$, τυχαίο αλλά ορισμένο.
Αφού $f_n \xrightarrow{u} f$ για το $\varepsilon_0/3$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ να ισχύει: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon_0}{3}$, $\forall x \in X$ (1)
Τώρα, η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, από την υπόθεση. Άρα, από τον ορισμό της συνέχειας της f_{n_0} στο x_0, για το $\frac{\varepsilon_0}{3}$, υπάρχει $\delta_0 > 0$, $\forall x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta_0$ να ισχύει:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad (2)$$

Για $x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta_0$

$$|f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)) + (f_{n_0}(x_0) - f(x_0))|$$

Θα χρησιμοποιήσω την τριγωνική ανισότητα

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ από την σχέση (1)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ από την σχέση (2)}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon_0}{3} \text{ από την σχέση (1)}} \quad (3)$$

σο 2χόλιο

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\frac{\varepsilon_0}{3} = \varepsilon_0$$

Δηλαδή, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$, $\forall x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta_0$
Άρα, θα ισχύει το ανάλογο $\forall \varepsilon > 0$.
Αυτό σημαίνει εξ ορισμού ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

Οριακή τιμή (όριο) μιας ομοιόμορφης συγκλίνουσας ακολουθίας

ΣΟΒΑΡΑ

Πρόταση:

Έστω (X,ρ) να είναι μετρικός χώρος. Έστω $f, f_n : X\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις. Έστω x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι:

1) $f_n \xrightarrow{u} f$ και 2) $\exists$ τα όρια $\lim\limits_{t\to x_0} f_n(t)$, $\forall n=1,2,\dots$

Τότε: η 1) υπάρχει το όριο $\lim\limits_{t\to x_0} f(t)$.

Έστω $a_n := \lim\limits_{t\to x_0} f_n(t)$ $\forall n=1,2,\dots$

Τότε, η a_n είναι συγκλίνουσα. Έστω $a=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Τότε

$a=\lim\limits_{t\to x_0} f(t)$

$\boxed{\text{στις εξετάσεις}}$

SOS!

Απόδειξη

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\tilde{f}_n : X \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{αν } x\in X\setminus\{x_0\} \\ a_n, & \text{αν } x=x_0 \end{cases}$$

Είναι συνεχείς οι $\tilde{f}_n$, $n=1,2,\dots$ στο x_0 γιατί

$\tilde{f}_n(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \tilde{f}_n(x)$

η a_n είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών

Ισχύει ότι $a_n = \lim\limits_{t\to x_0} f_n(t)$. Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι συγκλίνουσα. Δείχνουμε ότι είναι βασική ακολουθία. Για $t\in X\setminus\{x_0\}$, $n,m\in\mathbb{N}$

$$|a_n-a_m| = |a_n - f_n(t) + f_n(t) - f_m(t) + f_m(t) - a_m| \underset{\text{τριγωνική ανισότητα}}{\leq}$$

$$\leq |a_n - f_n(t)| + |f_n(t)-f_m(t)| + |f_m(t)-a_m| \quad (A)$$

Από γνωστή πρόταση, αφού η $f_n \xrightarrow{u} f$ έπεται ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα βασική. Έστω τυχαίο $\varepsilon_0>0$, σταθερό. Για το $\frac{\varepsilon_0}{3}$ από τον ορισμό της ομοιόμορφης βασικής ακολουθίας (f_n) $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n,m\in\mathbb{N}$ με $n,m\geq n_0$ να ισχύει $|f_n(t)-f_m(t)| < \frac{\varepsilon_0}{3}$ $\forall t\in X\setminus\{x_0\}$ (1)

Σταθεροποιώ n_1 και $m_1 \geq n_0$. Τώρα από την (1) για τα n_1, m_1 παίρνω $|f_{n_1}(t) - f_{m_1}(t)| < \frac{\varepsilon_0}{3}$, $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$ (2)

Από την οριακή τιμή της f_{n_1} στο x_0, έπεται από τον ορισμό ότι $\exists\ \delta_1 > 0$, $\forall t \in X$ με $0 < \rho(t, x_0) < \delta_1$ ισχύει:

$|f_{n_1}(t) - a_{n_1}| < \frac{\varepsilon_0}{3}$ (3). Το ίδιο ισχύει για την f_{m_1}.

Για την f_{m_1}, αφού $\lim_{t \to x_0} f_{m_1}(t) = a_{m_1}$, για το $\frac{\varepsilon_0}{3}$ $\exists\ \delta_2 > 0$.

$\forall t \in X : 0 < \rho(t, x_0) < \delta_2$ να ισχύει: $|f_{m_1}(t) - a_{m_1}| < \frac{\varepsilon_0}{3}$ (4)

Η σχέση Α ισχύει $\forall n, m \in \mathbb{N}$ άρα θα ισχύει και για τα n_1, m_1.
Επιλέγω τυχόν $t \in X$ με: $0 < \rho(t, x_0) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$
Τότε από τις (1), (2), (3), (4) παίρνω ότι: $|a_{n_1} - a_{m_1}| < \varepsilon_0$.
Άρα, για τον ίδιο λόγο ισχύει: $|a_n - a_m| < \varepsilon_0$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$
Άρα, αφού ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι η a_n είναι βασική ακολουθία (που προκύπτει με βάση τον ορισμό της βασικής). Άρα, είναι συγκλίνουσα. Έστω $a = \lim_{n \to +\infty} a_n \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε την $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ με τύπο $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{x_0\} \\ a, & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$

Έχουμε, $a_n = \tilde{f}_n(x_0)$ από τον ορισμό της $\tilde{f}_n$, $n = 1, 2, \dots$

$$a_n \longrightarrow a \longleftrightarrow \tilde{f}_n(x_0) \longrightarrow \tilde{f}(x_0)$$

Έστω $\varepsilon_0 > 0$ τυχαίο και σταθερό. Αφού $f_n \xrightarrow{u} f$ για το ε_0 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_0$ (5) $\forall x \in X \setminus \{x_0\}$.

Επειδή $\tilde{f}_n(x_0) \to \tilde{f}(x_0)$ έπεται για το ε_0 να υπάρχει $n' \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n'$ να ισχύει: $|\tilde{f}_n(x_0) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon_0$ (6)

Έστω $n_1 = \max\{n_0, n'\}$. Άρα, από τις (5), (6) που ισχύουν $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1$ έχουμε ότι $|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon_0$, $\forall x \in X$

Αφού, λοιπόν ισχύει $\forall \varepsilon > 0$, έπεται (από τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης) ότι $f_n \xrightarrow{u} \tilde{f}$

Οι $\tilde{f}_n$ είναι συνεχείς στο x_0 (το δείξαμε στην αρχή).
Άρα, αφού $\tilde{f}_n \xrightarrow{u} \tilde{f}$ έπεται από την προηγούμενη πρόταση ότι η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο x_0.

Άρα, $\tilde{f}(x_0) = \lim_{t \to x_0} \tilde{f}(t) = \lim_{t \to x_0} f(t)$

$a = \lim_{t \to x_0} f(t)$ ◻

Αυτά που είπαμε δεν ισχύουν για την κατά σημείο σύγκλιση.

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με τύπο $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ $n = 1, 2, \ldots$ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in [0,1) \\ 1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Η f δεν είναι συνεχής, αφού είναι ασυνεχής σε ένα σημείο στο 1.

Έστω $x_0 \in [0,1)$ τότε $x_0^n \to 0$. Όμως $x_0^n = f_n(x_0)$ και

Δηλαδή $f_n(x_0) \to f(x_0)$, $x_0 \in [0,1)$ $0 = f(x_0)$

$f_n(1) = 1^n = 1 = f(1) \to f_n(1) \to f(1)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$, καθώς $n \to +\infty$, $\forall x \in [0,1]$. Άρα, $f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$

Οι f_n, $n = 1, 2, \ldots$ είναι συνεχής στο 1, αλλά η f δεν είναι.

Επίσης, $f_n \not\xrightarrow{u} f$

◻

<u>Ειδική περίπτωση ακολουθίας συναρτήσεων. Σειρές συναρτήσεων</u>

<u>ορισμός</u>: Έστω X να είναι ένα σύνολο και έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις. Ορίζουμε από τις (f_n), $n = 1, 2, \ldots$ μια νέα ακολουθία συναρτήσεων ως εξής:

Θέτουμε $S_1 = f_1$, $S_2 = f_1 + f_2$, ... $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, $n = 1, 2, \dots$
Ονομάζουμε την (S_n), $n=1,2,\dots$ ακολουθία μερικών αθροισμάτων της (f_n)

// Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα εάν η (S_n) συγκλίνει ομοιόμορφα //
Παρόμοια και κατά σημείο!

Δηλαδή, λέμε // η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο // εάν η (S_n) συγκλίνει κατά σημείο.
Όταν η (S_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε συμβολίζουμε $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Παρόμοια και για κατά σημείο στην f, τότε συμβολίζουμε $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$

Πρόταση: Έστω X, να είναι ένα σύνολο και $f: X \to \mathbb{R}$ να είναι συναρτήσεις. Τότε ισχύει το κριτήριο Cauchy.
(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει:
$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$. $k = 0, 1, 2,$
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$
(ii) (Κριτήριο Weierstrass)
Αν ισχύει ότι:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x \in X} f_n(x) < +\infty,$$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη
(i) Έστω ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Άρα $\exists f: X \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $S_n \xrightarrow{u} f$. Άρα, από γνωστή πρόταση η (S_n) είναι ομοιόμορφα βασική. Έστω $\varepsilon_0 > 0$ τυχαίο, σταθερό. Άρα, η (S_n) είναι ομοιόμορφα βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_0$ να ισχύει $|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon_0$ $\forall x \in X$.

Επιλέγω τυχόν $n \geq n_0+1$ και επιλέγω $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και θέτω $m = k+n$, τότε $m \geq n \geq n_0+1$. Για το m και το $n-1 \geq n_0$

$$|S_m - S_{n-1}(x)| < \varepsilon_0 \quad , \forall x \in X$$

$$\Leftrightarrow |(f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_{k+n}(x)) - (f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_{n-1}(x)| < \varepsilon_0$$

$$\Leftrightarrow |f_n(x)+f_{n+1}(x)+\dots+f_{k+n}(x)| < \varepsilon_0 \quad \forall x \in X$$

Άρα, ισχύει το (i) για το n_0+1.

$\square$